ENSI
Option P - Session 1979
PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : 4 heures

Soit λ un nombre réel strictement positif. Dans un repère orthonormé (oxy) du plan euclidien, on considère le graphe Γ_λ de la fonction f_λ, continue sur l'intervalle $[0,1]$, et telle que l'on ait, pour tout $x \in]0,1[$,

$$f_\lambda(x) = \left(1 - x^{\frac{1}{\lambda}}\right)^\lambda .$$

On note A le point de coordonnées $x = 1$, $y = 0$ et B le point de coordonnées $x = 0$, $y = 1$.

I

1. Calculer les dérivées première et seconde de la fonction f_λ par rapport à x, et étudier leur signe pour $0 < x < 1$ en discutant selon la valeur de λ.
2. Préciser la nature géométrique des arcs de courbe de Γ_1,$\Gamma_{\frac{1}{2}}$ et Γ_2.
3. (a) Indiquer un axe de symétrie commun à toutes les courbes Γ_λ.
   (b) En fonction de λ, calculer l'abscisse du point S_λ de Γ_λ situé sur cet axe, ainsi que la valeur absolue du rayon de courbure à Γ_λ en ce point.
4. En fonction de λ, discuter si Γ_λ tourne la concavité vers les $y > 0$ ou vers les $y < 0$.
5. Résumer les résultats obtenus par un graphique où figureront $\Gamma_{\frac{1}{4}}$,$\Gamma_{\frac{1}{2}}$, Γ_1, Γ_2, Γ_4.
6. De l'étude qui précède, déduire que, si n est un entier ≥ 1 et si a et b sont des nombres réels tels que $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$, on a les inégalités :

$$(a+b)^n + \left(\sqrt[n]{1-a^n} + \sqrt[n]{1-b^n}\right)^n \leq 2^n$$

et

$$\sqrt[n]{a+b} + \sqrt[n]{\left(1-\sqrt[n]{a}\right)^n + \left(1-\sqrt[n]{b}\right)^n} \geq \sqrt[n]{2}.$$

II

Pour tout réel $\lambda > 0$, on pose :

$$F(\lambda) = \lambda \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^\lambda dt$$

1. Sans chercher à calculer cette intégrale, montrer qu'elle convergente.
2. Montrer que l'aire du domaine bornée par Γ_λ, le segment OA de l'axe Ox et le segment OB de l'axe Oy, a pour mesure $F(\lambda)$.
3. (a) En fonction de λ, calculer l'aire du triangle OAS_λ, et comparer $F(\lambda)$ à cette aire.
   (b) Quelle est la valeur des limites de $F(\lambda)$ quand λ tend vers 0 ? tend vers $+\infty$?
   (c) Du II $3.(a)$ de cette partie, déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} F(n)$ converge, et que la somme σ de cette série est inférieure à 1.
4. Soit n un entier ≥ 1, calculer $F(n)$ successivement par les deux méthodes suivantes :
   - En se débarrassant du facteur t^{n-1} sous l'intégrale grâce à une intégration par parties,
   - En développant $(1-t)^n$ par la formule de binôme de Newton avant d'intégrer.

En déduire la formule :

$$n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\mathtt{C}_n^k}{n+k}=\frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

où $\mathtt{C}_n^k$ désigne le nombre de combinaisons de n objets k à k.

III

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ \ (4x-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(x+2)y=x.$$

1. Montrer qu'il existe une série entière et une seule $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence $R>0$, et dont la somme y soit, pour $|x|<R$, solution de (E). Que veut R ? Vérifier sur les résultats obtenus que $\sigma=S(1)$.

2. (a) Calculer les primitives de la forme $\sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$, où $0<x<4$.

(b) Trouver la solution générale de (E) pour $0<x<4$.

(c) Parmi les solutions de (E) pour $0<x<4$, montrer qu'il existe une et une seule telle que $\lim\limits_{\substack{x>0\\ y\to 0}}\dfrac{y(x)}{x}$ existe et soit finie, et en déduire que, pour $0<x<4$, on a la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\frac{1}{4-x}\left(x+4\sqrt{\frac{x}{4-x}}\arcsin\sqrt{\frac{x}{4}}\right).$$

3. En déduire la valeur de σ.

IV

Déterminer une valeur du nombre réel $\lambda>0$, de sorte que, pour tout point M de Γ_α, les axes Ox et Oy découpent sur la tangente en M à Γ_λ un segment de longueur constamment égale à 1.

FIN DE L'ÉPREUVE